誤差伝播について (数値解析セミナー報告 1)

宇野, 利雄

数理解析研究所講究録
12巻 1966年 10-12

誤差伝播について

日本大学
理工学部　宇　野　利　雄

数値計算を一つの情報処理操作と見なすとき，その操作によって原資料からの情報がいかに忠実に伝えられるか，またはいかに歪曲した形のものがあらわれてくるか，これはいわゆる誤差伝播の問題であるが，その真相の把握は必ずしも簡単ではない。筆者はかってこの問題を究明するために，資料となるようないくつかの特徴ある数値実験例を発表したことがあった〔1〕。今ここでは最近に経験した一つの数値例をあげて〔1〕における考察の補足としたい。

これは桁数の多い計算では間違った答が出てくるのに，桁数の少ない計算の方が正しい結果を与えるという一見あまのじやくな例である。計算途中において桁落ちのおこる場合，その悪影響からのがれるために高精度計算がしばしば行なわれる。計算で使う式に近似式がなく正確式ばかりであって打切りの誤差がないときは，誤差の発生はもっぱら丸めの誤差のみとなる。このようなときには上のような手段はよく効果を奏する。ところが丸めの誤差とともに打切りの誤差がからみ合ってくるときには必ずしも高精度計算の効用は発揮できない。それにしても高精度の方が低精度計算よりも効率において同等以上であることが普通であるように一応は推測される。ところが以下に示すのはこの推測とは逆の事態を生ずる例である。

扱われたのは常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = 1 - x^3(y - x)$$

の初期値問題であって，初期値 $x=0$，$y=1$ より出立し，間隔 h を $h=0.2$ ととって Runge-Kutta 法を実行したものである。計算を 10^{-4}，10^{-3}，10^{-2} 以下四捨五入によって実行したものが次頁の表にあげてある。

実はこの方程式は求積解法で解け

$$y = x + Ce^{-x^4/4}$$

となるのであるから，x が増大するときどの解も急速に漸近線 $y=x$ に近づくものである。ところで上の数値例の 10^{-4}，10^{-3} 以下四捨五入の場合は $x=2.4$ の附近では $y=x$ に接近しておきながら，その後これから離れ，ついにはいちぢるしく違った状況を示すようになる。実はこれは間

隔hを0.2 としたのが $x=2.4$ あたりから後では不当になり，そのために大きな打切り誤差を生じたためである。

x	10^{-4}以下 四捨五入	10^{-3}以下 四捨五入	10^{-2}以下 四捨五入
0.0	1.0000	1.000	1.00
0.2	1.1996	1.200	1.20
0.4	1.3936	1.394	1.39
0.6	1.5681	1.568	1.56
0.8	1.7026	1.700	1.69
1.0	1.7787	1.779	1.77
1.2	1.7954	1.796	1.79
1.4	1.7827	1.783	1.78
1.6	1.7946	1.795	1.79
1.8	1.8737	1.874	1.87
2.0	2.0209	2.021	2.02
2.2	2.2060	2.206	2.21
2.4	2.4034	2.403	2.40
2.6	2.6055	2.605	2.60
2.8	2.8254	2.824	2.80
3.0	3.3084	3.294	3.00
3.2	12.3925	11.963	3.20

すなわちRunge−Kutta法は4次まで合う計算なのでyと漸近値xとの差の一段の進行は見当としてほぼ $(y-x)[1+\varphi(gh)]$ で与えられる。ここに方程式の右辺をfとして $g=\partial f/\partial y$ であり，またφは4次式

$$\varphi(z)=z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}$$

である。gh が小さく $1+\varphi(gh)$ がよく e^{gh} の近似を与えてくれるあたりでは，Runge−Kutta 法は妥当であるが，これがそうでなくなると間隔hをさらに細かにしなければ方法は適用できなくなる。特にghが負のとき $gh<-2.87$ となると $\varphi(gh)$ が正となり，$y-x$の増減が反対となって実際の事情とは似ても似つかないものになる。今の場合このような限界は$x=2.43$であってちょうど表で見るところのことがこれで説明される。ただしこれは 10^{-4}, 10^{-3} 以下四捨五入の場合であるが，10^{-2}以下四捨五入のときはこの事情はおこらず，解は全く正確を得た$y=x$に収束した。

いかなる事情から上のようになったかは前にあげた式 $(y-x)[1+\varphi(gh)]$ で解釈できるであろう。すなわち低精度のときは $y-x$ を早くから丸めてちようど0としているので，上式による打切り誤差の拾い上げがなされない。間隔が不当であってもその打切り誤差があらわれてくるのを因数 $y-x=0$ で封じてしまった結果になったのである。

〈引　用〉〔1〕宇野　利雄，誤差伝播の問題，　数学15巻1号，pp.30－40，1963．